文章编号:1000-4939(2023)02-0310-10

非比例阻尼体系等效 Rayleigh 阻尼模型时域计算方法

王书霞[1],赵雯桐[2],孙攀旭[3],杨红[3]

(1. 郑州航空工业管理学院材料学院,450046 郑州;2. 郑州航空工业管理学院土木建筑学院,450046 郑州;3. 重庆大学土木工程学院,400045 重庆)

摘　要:Rayleigh 阻尼模型具有数学简易性的优点,应用广泛,其阻尼矩阵构造依赖于结构模态阻尼比。结构阻尼(复阻尼)模型的阻尼矩阵直接由材料损耗因子和刚度矩阵决定,在非比例阻尼体系中具有阻尼矩阵便于构造的优点,但存在时域计算结果发散、初值条件不易确定和频响函数非因果等缺陷。本研究结合两种阻尼模型的优点,分别依据阻尼衰减和阻尼耗能,提出了与结构阻尼模型等效的 Rayleigh 阻尼模型。算例分析结果表明:等效 Rayleigh 阻尼模型克服了结构阻尼模型的缺陷,同时保留了非比例阻尼体系中阻尼矩阵易构造的优点;与基于阻尼衰减等效的 Rayleigh 阻尼模型相比,基于阻尼耗能等效的 Rayleigh 阻尼模型计算结果近似相等,但避免了复模态分析,且计算过程直观简单。

关键词:非比例阻尼;结构阻尼;Rayleigh 阻尼;阻尼衰减;阻尼耗能

中图分类号:TU311.3　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j. issn. 1000-4939. 2023. 02. 009

Time-domain calculation method of equivalent Rayleigh damping model for non-proportional damping system

WANG Shuxia[1], ZHAO Wentong[2], SUN Panxu[3], YANG Hong[3]

(1. School of Materials Science and Engineering, Zhengzhou University of Aeronautics, 450046 Zhengzhou, China;
2. School of Civil and Architecture, Zhengzhou University of Aeronautics, 450046 Zhengzhou, China;
3. School of Civil Engineering, Chongqing University, 400045 Chongqing, China)

Abstract: Rayleigh damping model has the advantage of mathematical simplicity, but the construction of damping matrix depends on the the structural modal damping ratios. The damping matrix of the structural damping model (complex damping model) can be directly constructed by material loss factors and structural stiffness matrix, which has the advantage that the damping matrix is easily constructed for non-proportional damping system. However, the structural damping model has some shortcomings, such as the divergence of the time-domain calculation results, the difficulty of determining the initial value conditions and the non-causality of the frequency response function. Combined with the advantages of the two damping

收稿日期:2022-04-22　　修回日期:2022-08-20

基金项目:国家自然基金资助项目(No. 52078078);河南省科技攻关资助项目(No. 222102230010)

通信作者:杨红,教授。E-mail: yangh@cqu.edu.cn

引用格式:王书霞,赵雯桐,孙攀旭,等. 非比例阻尼体系等效 Rayleigh 阻尼模型时域计算方法[J]. 应用力学学报,2023,40(2):310-319.
WANG Shuxia, ZHAO Wentong, SUN Panxu, et al. Time-domain calculation method of equivalent Rayleigh damping model for non-proportional damping system[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(2):310-319.

models, the Rayleigh damping model is equivalent to structural damping, which is constructed in this paper according to the equivalent damping attenuation and equivalent damping energy dissipation, respectively. The numberical examples show that the equivalent Rayleigh damping model can overcome the shortcomings of the structural damping model and retain the advantage that the damping matrix can be easily constructed for the non-proportional damping system. Compared with the Rayleigh damping model based on the equivalent damping attenuation, the calculated results of the Rayleigh damping model based on the equivalent damping energy dissipation are approximately equal. Moreover, complex modal analysis is avoided and the calculation process is more intuitive and simple.

Key words: non-proportional damping; structural damping; Rayleigh damping; damping attenuation; damping energy dissipation

随着结构功能性的增多和安全性的提升，单一材料组成的比例阻尼结构较难满足人们对工程结构的要求，由不同阻尼特性材料组成的非比例阻尼混合结构逐渐被推广使用[1-2]。因此，非比例阻尼体系动力响应的计算方法研究具有重要意义。黏性阻尼模型和结构阻尼模型[3]（或称复阻尼模型[4-5]、滞变阻尼模型[6]、率无关阻尼模型[7]等）是最常用的结构内阻尼模型[8]，黏性阻尼模型具有计算过程简单的优点，但非比例阻尼体系的阻尼矩阵不再满足经典正交条件，需要借助于状态空间法[9]，采用复模态叠加法求解结构动力响应[10]。同时，基于黏性阻尼模型的非比例阻尼体系阻尼矩阵构造十分困难[11]。与黏性阻尼模型相比，结构阻尼模型具有阻尼矩阵易构造的优点，其阻尼矩阵可直接依据材料损耗因子构造得到[12-13]，避免了结构模态阻尼比的测定问题。基于结构阻尼模型的复模态叠加法可直接在物理空间内实现[14]，但结构阻尼模型存在时域发散[15-17]、频响函数非因果[18-19]、有阻尼自振频率随损耗因子增大而增大[20]等缺陷，这使得结构阻尼模型仅适用于有限频率范围内结构的频域分析[21]。

Rayleigh 阻尼模型是一种简单、应用广泛的黏性阻尼模型，通过假定阻尼矩阵与质量矩阵、刚度矩阵成比例，保留了其数学简易性的优点。为了计算非比例阻尼混合结构的动力反应，常见做法是将非比例阻尼体系近似等效为比例阻尼体系，采用 Rayleigh 阻尼模型求解动力响应。但 Rayleigh 阻尼矩阵的构造不仅依赖于质量矩阵和刚度矩阵，还取决于结构的模态阻尼比。对于大型复杂结构，模态阻尼比的测定是十分困难的，通过振动试验也仅能得到低阶振型的模态阻尼比。因此，在结构阻尼模型的基础上，建立合理、等效的 Rayleigh 阻尼模型能有效提高非比例阻尼体系动力响应计算的效率。

为了利用结构阻尼模型中阻尼矩阵易构造的优点，文献[22]利用振型向量构建权重函数，得到了等效于结构阻尼模型的 Rayleigh 阻尼模型；文献[23]以振型参与质量系数作为权系数，采用最小二乘法将 Rayleigh 阻尼矩阵与结构阻尼矩阵等效，进而得到等效 Rayleigh 阻尼模型。但上述方法的等效过程较为复杂，不适宜在工程实践中推广使用。

针对非比例阻尼体系的动力响应求解问题，本研究在结构阻尼模型的基础上，依据结构瞬态反应和稳态反应各自的特点，分别提出基于阻尼衰减等效的 Rayleigh 阻尼模型和基于阻尼耗能等效的 Rayleigh 阻尼模型，可克服结构阻尼模型时域发散的缺陷，同时保留了其阻尼矩阵易构造的优点，是一种效率更高的非比例阻尼体系的时域动力响应计算方法。

1 结构阻尼模型的缺陷分析

基于结构阻尼模型的单自由度体系运动方程为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \mathrm{i}\eta kx(t) = f + \mathrm{i}f' \tag{1}$$

式中：m 为结构的质量；k 为结构的刚度；η 为损耗因子；f 为外激励；f' 为 f 的复化对偶项[7]；i 为虚数单位，即 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$。

$x(t)$ 为结构位移响应的复数表达形式，即

$$x(t) = x_1(t) + \mathrm{i}x_2(t) \tag{2}$$

式中，$x_1(t)$ 为结构的真实位移响应。

式(1)对应的自由振动方程为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \mathrm{i}\eta kx(t) = 0 \tag{3}$$

采用复平面法求解式(3)，可得

$$x_1(t) = [A_1\cos(\omega_c t) + A_2\sin(\omega_c t)]\mathrm{e}^{-\alpha_c t} + [A_3\cos(\omega_c t) + A_4\sin(\omega_c t)]\mathrm{e}^{\alpha_c t} \tag{4}$$

式中：A_1、A_2、A_3 和 A_4 为待定系数；α_c 为自由衰减系数；ω_c 为有阻尼自振频率。

$$\begin{cases}\alpha_c = \omega\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{2}} \\ \omega_c = \omega\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2}}\end{cases} \tag{5}$$

由式(4)和式(5)可知,结构阻尼模型计算的自由振动通解中包含发散项,导致结构阻尼模型的时域计算结果存在发散现象,不能稳定收敛;式(4)中存在 4 个待定系数,而动力计算的初值仅包含初始位移 $x_1(t_0)$ 和初始速度 $\dot{x}_1(t_0)$,导致结构阻尼模型的时域计算过程中初值条件不易确定。式(5)表明基于结构阻尼模型的有阻尼自振频率随着损耗因子的增大而增大,同时结构阻尼模型还存在频响函数非因果的缺陷[18-19]。因此,结构阻尼模型无法直接用于计算结构的时域动力响应。

2 基于阻尼衰减等效的 Rayleigh 阻尼模型

阻尼将导致结构的自由振动响应逐渐收敛为静止状态,因此,本研究首先从自由振动衰减出发,构建等效于结构阻尼模型的黏性阻尼模型。然后,在单自由度体系的等效黏性阻尼模型基础上,依据多自由度体系的结构阻尼模型,进一步构建非比例阻尼体系的等效 Rayleigh 阻尼模型。

2.1 单自由度体系的等效黏性阻尼模型

由式(4)可知,舍弃结构阻尼自由振动通解中的发散项,可得到稳定收敛的部分自由振动通解为

$$x_1(t) = [A_1\cos(\omega_c t) + A_2\sin(\omega_c t)]e^{-\alpha_c t} \tag{6}$$

基于黏性阻尼模型的单自由度体系自由振动方程为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) = 0 \tag{7}$$

式中: m 为结构的质量; k 为结构的刚度; c 为结构的黏性阻尼系数,且

$$c = \frac{2\xi k}{\omega} \tag{8}$$

式中: ξ 为结构的阻尼比; ω 为结构的无阻尼自振频率,且 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$。

求解式(7),可得到基于黏性阻尼模型的结构自由振动通解为

$$x(t) = [B_1\cos(\omega_v t) + B_2\sin(\omega_v t)]e^{-\alpha_v t} \tag{9}$$

式中: B_1 和 B_2 为待定系数; α_v 为自由衰减系数; ω_v 为有阻尼自振频率。

$$\begin{cases}\alpha_v = \xi\omega \\ \omega_v = \omega\sqrt{1-\xi^2}\end{cases} \tag{10}$$

式(9)和式(10)表明,相比结构阻尼模型,黏性阻尼模型的自由振动通解中仅包含指数衰减项,不包含指数增加项,且有阻尼自振频率随阻尼比的增大而减小。为保证两种阻尼模型的阻尼衰减相等,即自由衰减系数相等,由式(5)和式(10)可得

$$\xi\omega = \omega\sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{2}} \tag{11}$$

进一步得到

$$\xi = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{2}} \tag{12}$$

由式(12)可得等效黏性阻尼运动方程为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \frac{2k\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{2}}}{\omega}\dot{x}(t) = f \tag{13}$$

2.2 多自由度体系的等效 Rayleigh 阻尼模型

基于结构阻尼模型的多自由体系时域运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \mathrm{i}\boldsymbol{K}_\eta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F} + \mathrm{i}\boldsymbol{F}' \tag{14}$$

式中:$\boldsymbol{M}$ 为结构的质量矩阵;$\boldsymbol{K}$ 为结构的刚度矩阵;$\boldsymbol{K}_\eta$ 为结构的阻尼矩阵;$\boldsymbol{F}$ 为外激励向量;$\boldsymbol{F}'$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的复化对偶项。

阻尼矩阵可表示为

$$\boldsymbol{K}_\eta = \sum_{i=1}^{S}\eta_{e,i}\boldsymbol{K}_i \tag{15}$$

式中: $\eta_{e,i}$ 为第 i 种材料对应的损耗因子; $\boldsymbol{K}_i$ 为第 i 种材料对应的刚度矩阵。

方程式(14)对应的特征方程为

$$\boldsymbol{M}\lambda^2 + \mathrm{i}\boldsymbol{K}_\eta + \boldsymbol{K} = 0 \tag{16}$$

求解方程式(16),可得特征根为

$$\begin{cases}\lambda_{j1} = -a_j + \mathrm{i}b_j \\ \lambda_{j2} = a_j - \mathrm{i}b_j\end{cases} \tag{17}$$

式中:特征根的虚部 b_j 为混合结构第 j 阶振型有阻尼自振频率;特征根的实部 a_j 为衰减系数。

基于黏性阻尼模型的多自由度体系时域运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F} \tag{18}$$

式中,$\boldsymbol{C}$ 为结构的阻尼矩阵。

Rayleigh 阻尼模型具有数学表达简单等优点,

在多自由度结构体系的动力响应计算中得到了广泛使用。阻尼矩阵可表示为

$$\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{M} + \beta\boldsymbol{K} \tag{19}$$

第 j 阶振型对应的衰减系数为

$$\alpha_{v,j} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\beta\omega_j^{\ 2} \tag{20}$$

式中，ω_j 为混合结构第 j 阶振型无阻尼自振频率。

令 Rayleigh 阻尼模型和结构阻尼模型的第 j 阶振型自由衰减系数相等，可得

$$a_j = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\beta\omega_j^{\ 2} \tag{21}$$

选择结构某两阶重要振型的自振频率 ω_m 和 ω_n，式(21)可进一步转化为

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{2}\beta\omega_m^{\ 2} = a_m \\ \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{2}\beta\omega_n^{\ 2} = a_n \end{cases} \tag{22}$$

求解式(22)，可得到 Rayleigh 阻尼矩阵的系数 α 和 β 为

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2a_n\omega_m^{\ 2} - 2a_m\omega_n^{\ 2}}{\omega_m^{\ 2} - \omega_n^{\ 2}} \\ \beta = \dfrac{2a_m - 2a_n}{\omega_m^{\ 2} - \omega_n^{\ 2}} \end{cases} \tag{23}$$

综上，利用自由衰减相等，可构建出等效于结构阻尼模型的 Rayleigh 阻尼模型。

3 基于阻尼耗能等效的 Rayleigh 阻尼模型

结构的动力响应是由瞬态响应和稳态响应组成，本研究在第 2 节依据瞬态响应衰减(自由振动响应衰减)构建了与结构阻尼模型等效的 Rayleigh 阻尼模型。本节则根据稳态响应的特点，首先从阻尼耗能出发，构建等效于结构阻尼模型的黏性阻尼模型。然后，在单自由度体系的等效黏性阻尼模型基础上，依据多自由度体系的结构阻尼模型，进一步构建非比例阻尼体系的等效 Rayleigh 阻尼模型。

3.1 单自由度体系的等效黏性阻尼模型

基于黏性阻尼模型的单自由度体系时域运动方程为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) = f \tag{24}$$

谐波作用下单自由度体系的位移响应为

$$x(t) = X\sin\theta t \tag{25}$$

式中：X 为结构位移响应的振幅；θ 为外激励谐波的振动频率。

谐波作用下，基于黏性阻尼模型的单自由度体系每周期耗散能量为

$$\Delta W_v = \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} c\dot{x}(t)\,\mathrm{d}x(t) \tag{26}$$

将式(25)代入式(26)，可得

$$\Delta W_v = \pi c\theta X^2 \tag{27}$$

基于结构阻尼模型的单自由度体系时域运动方程在实数域内的表达式为

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + kx_1(t) - \eta kx_2(t) = f \\ m\ddot{x}_2(t) + kx_2(t) + \eta kx_1(t) = f' \end{cases} \tag{28}$$

谐波作用下单自由度体系的位移响应为

$$\begin{cases} x_1(t) = X\sin\theta t \\ x_2(t) = -X\cos\theta t \end{cases} \tag{29}$$

谐波作用下，基于结构阻尼模型的单自由度体系每周期耗散能量为

$$\Delta W_h = -\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \eta kx_2(t)\,\mathrm{d}x_1(t) \tag{30}$$

将式(29)代入式(30)，可得

$$\Delta W_h = \pi\eta kX^2 \tag{31}$$

当外激励频率与结构的自振频率相等(结构共振)，即 $\theta = \omega$ 时，式(27)可进一步转化为

$$\Delta W_v = \pi c\omega X^2 \tag{32}$$

令两种阻尼模型中阻尼耗散能量相等，可得

$$\pi c\omega X^2 = \pi\eta kX^2 \tag{33}$$

进一步得到

$$c = \frac{\eta k}{\omega} \tag{34}$$

由式(34)可得等效黏性阻尼运动方程为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \frac{\eta k}{\omega}\dot{x}(t) = f \tag{35}$$

3.2 多自由度体系的等效 Rayleigh 阻尼模型

基于黏性阻尼模型的多自由度体系无阻尼振型向量为

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\varphi}_N] \tag{36}$$

以第 j 阶振型自振频率为振动频率的谐振作用下，多自由度体系的位移响应与振型形状成比例，即

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_j P\sin\omega_j t \tag{37}$$

式中，P 为位移响应的幅值系数。

结构的模态阻尼耗散能量为

$$\Delta W_{v,j} = \pi\omega_j P^2\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varphi}_j \tag{38}$$

结构阻尼模型下,结构的模态阻尼耗散能量为

$$\Delta W_{h,j} = \pi P^2 \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{K}_\eta \boldsymbol{\varphi}_j \tag{39}$$

令两种模型的模态阻尼耗散能量相等,即

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varphi}_j = \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{K}_\eta \boldsymbol{\varphi}_j}{\omega_j} \tag{40}$$

基于 Rayleigh 阻尼模型,式(40)可进一步表示为

$$\alpha \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_j + \beta \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_j = \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{K}_\eta \boldsymbol{\varphi}_j}{\omega_j} \tag{41}$$

选择两个结构重要的自振频率 ω_m 和 ω_n,式(41)可进一步转化为

$$\begin{cases} \alpha \boldsymbol{\varphi}_m^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_m + \beta \boldsymbol{\varphi}_m^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_m = \dfrac{\boldsymbol{\varphi}_m^T \boldsymbol{K}_\eta \boldsymbol{\varphi}_m}{\omega_m} \\ \alpha \boldsymbol{\varphi}_n^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_n + \beta \boldsymbol{\varphi}_n^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_n = \dfrac{\boldsymbol{\varphi}_n^T \boldsymbol{K}_\eta \boldsymbol{\varphi}_n}{\omega_n} \end{cases} \tag{42}$$

式(42)可进一步转化为

$$\begin{cases} \alpha m_m + \beta k_m = \dfrac{v_m}{\omega_m} \\ \alpha m_n + \beta k_n = \dfrac{v_n}{\omega_n} \end{cases} \tag{43}$$

式中,

$$\begin{cases} m_m = \boldsymbol{\varphi}_m^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_m \\ m_n = \boldsymbol{\varphi}_n^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_n \end{cases} \tag{44}$$

$$\begin{cases} k_m = \boldsymbol{\varphi}_m^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_m \\ k_n = \boldsymbol{\varphi}_n^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_n \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} v_m = \boldsymbol{\varphi}_m^T \boldsymbol{K}_\eta \boldsymbol{\varphi}_m \\ v_n = \boldsymbol{\varphi}_n^T \boldsymbol{K}_\eta \boldsymbol{\varphi}_n \end{cases} \tag{46}$$

求解式(43),可得 Rayleigh 阻尼系数为

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\dfrac{v_m}{\omega_m} k_n - \dfrac{v_n}{\omega_n} k_m}{m_m k_n - m_n k_m} \\ \beta = \dfrac{\dfrac{v_m}{\omega_m} m_n - \dfrac{v_n}{\omega_n} m_m}{m_n k_m - m_m k_n} \end{cases} \tag{47}$$

因此,利用模态阻尼耗散能量相等,可构建出与结构阻尼模型等效的 Rayleigh 阻尼模型。

4 算例分析

4.1 单自由度体系算例

基于阻尼衰减等效的黏性阻尼模型(viscous time-damain damping model based on free vibration response,VFT)与结构阻尼模型的自由衰减系数比值为

$$p_1 = 1 \tag{48}$$

基于阻尼耗能等效的黏性阻尼模型(viscous time-damain based on the equivalent damping energy consumption,VET)与结构阻尼模型的自由衰减系数比值为

$$p_2 = \frac{\eta}{\sqrt{2\sqrt{1+\eta^2}-2}} \tag{49}$$

依据式(48)和式(49)可计算不同等效阻尼模型的自由衰减系数比值的变化规律,计算结果如图 1 所示。随着损耗因子的增加,基于阻尼衰减等效的黏性阻尼模型与结构阻尼模型的自由衰减系数比值恒等于 1,基于阻尼耗能等效的黏性阻尼模型与结构阻尼模型的自由衰减系数比值接近 1。因此,两种等效黏性阻尼模型的自由振动响应与结构阻尼模型自由振动响应中剔除发散项的计算结果近似相等。

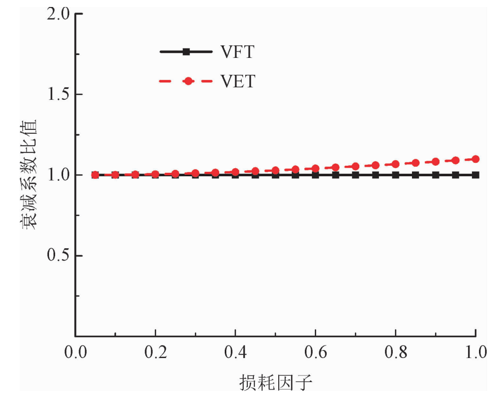


图 1 不同等效阻尼模型的衰减系数比值变化规律

Fig. 1 The variation laws of attenuation coefficient ratios based on different equivalent damping models

VFT 与结构阻尼模型的动力放大系数比值为

$$q_1 = \left(\frac{(1-\delta^2)^2+\eta^2}{(1-\delta^2)^2+2(\sqrt{1+\eta^2}-1)\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{50}$$

式中,δ 为外激励谐波频率与自振频率的比值。

VET 与结构阻尼模型的动力放大系数比值为

$$q_2 = \left(\frac{(1-\delta^2)^2+\eta^2}{(1-\delta^2)^2+\eta^2\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{51}$$

依据式(50)和式(51)可计算不同等效阻尼模型的动力放大系数比值的变化规律,计算结果如图 2 所示。随着损耗因子的增加,基于阻尼衰减等效的黏性阻尼模型与结构阻尼模型的动力放大系数比值、基于阻尼耗能等效的黏性阻尼模型与结构阻尼

模型的动力放大系数比值均接近 1。因此，两种等效黏性阻尼模型的稳态振动响应与结构阻尼模型稳态振动响应的计算结果近似相等。

地震作用下结构的动力响应由自由振动响应和稳态振动响应组成，因此地震作用下两种等效黏性阻尼模型的计算结果近似相等，且近似等于结构阻尼模型中剔除发散项后满足物理意义的计算结果，进而从理论上说明了方法的合理性。

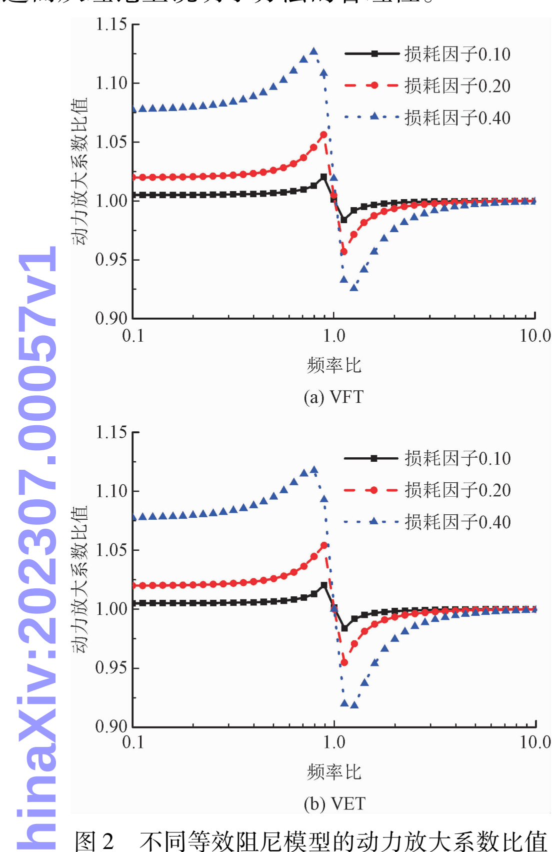


图 2　不同等效阻尼模型的动力放大系数比值

Fig. 2　The variation laws of dynamic magnification factors based on different equivalent damping models

以损耗因子为 0.10，自振频率为 10 rad/s 的单自由度体系为例，分别采用 VFT、VET、基于结构阻尼模型的时域计算方法（complex time-domain damping model，CT）和基于结构阻尼模型的频域计算方法（complex frequency-domain damping model，CF）计算单自由度体系在 El Centro 波、天津波作用下的时域动力响应时程，计算结果见图 3 和图 4。其中，VFT 的阻尼系数为 0.998 8，VET 的阻尼系数为 1.000 0。如图 3 和图 4 所示，随着地震作用时间的增加，CT 的时域计算结果逐渐出现发散现象，原因如第 1 节所述结构阻尼模型的自由振动通解中存在指数增加项；VFT、VET 和 CF 的时域动力响应时程一直保持稳定收敛，且计算结果近似相等（图 3～4），对应的响应峰值均小于 5%（表 1），进而证明了 VFT 和 VET 的正确性。以上计算结果表明，与结构阻尼模型的时域计算方法相比，基于等效黏性阻尼模型的计算方法可有效解决时域发散问题。

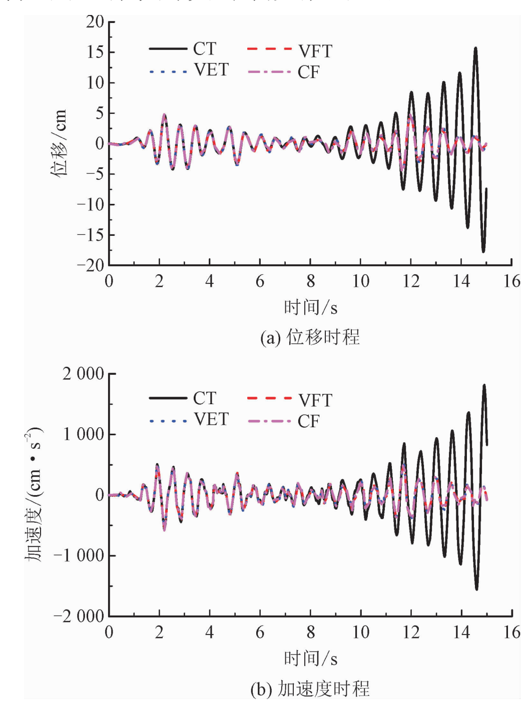


图 3　El Centro 波作用下的结构动力响应时程

Fig. 3　Time-history of structural dynamic response under El Centro wave

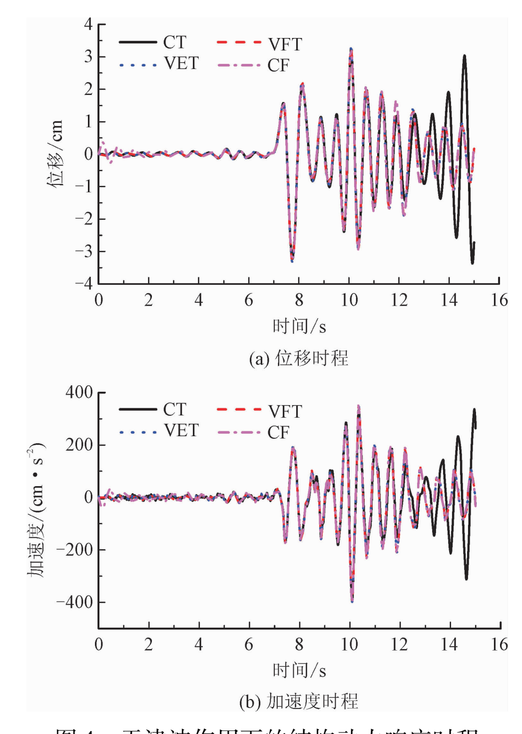


图 4　天津波作用下的结构动力响应时程

Fig. 4　Time-histories of structural dynamic responses under Tianjin wave

表 1 不同方法计算结构响应峰值的对比

Tab. 1 Comparisons of peak structural responses with different methods

类别	El Centro 波			天津波		
	CF	VFT	VET	CF	VFT	VET
位移峰值/cm	4.787 4	4.728 5	4.727 2	3.306 6	3.320 6	3.320 0
相对误差/%	–	1.23	1.26	–	0.42	0.41
加速度峰值/(cm·s^{-2})	583.107 0	578.493 0	578.373 0	400.569 0	398.317 0	398.188 0
相对误差/%	–	0.79	0.81	–	0.56	0.59

4.2 多自由度体系算例

针对非比例阻尼体系，基于阻尼衰减等效的 Rayleigh 阻尼模型和基于阻尼耗能等效的 Rayleigh 阻尼模型的计算流程图如图 5 所示，依据两种等效阻尼模型可计算结构的时域动力响应。



图 5 等效 Rayleigh 阻尼模型的计算流程图

Fig. 5 The flow chart of equivalent Rayleigh damping mode

以 6 自由度体系为例，质量和刚度分布如图 6 所示，模型 A 中上部 2 层结构的材料损耗因子为 0.04，下部 4 层结构的材料损耗因子为 0.10；在模型 A 的基础上，保持质量刚度不变，仅增大材料的阻尼性能，可进一步得到模型 B，上部 2 层结构的材料损耗因子为 0.10，下部 4 层结构的材料损耗因子为 0.20。然后，分别采用基于阻尼衰减等效的 Rayleigh 阻尼模型时域计算方法(Rayleigh time-domain damping model based on free vibration response，RFT)、基于阻尼耗能等效的 Rayleigh 阻尼模型时域计算方法(Rayleigh time-domain based on the equivalent damping energy dissipation，RET)和 CF 计算模型 A 和模型 B 在 El Centro 波、天津波作用下结构顶层的动力响应时程，结果如图 7～10 所示。在计算过程中，可直接选取结构的前两阶振型自振频率确定 Rayleigh 阻尼矩阵(算例为简单结构)，RFT 和 RET 对应的阻尼系数如表 2 所示。

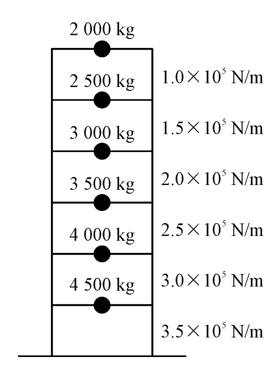


图 6 多自由度模型示意图

Fig. 6 Schematic diagrams of the multi-degree of freedom models

表 2 不同等效 Rayleigh 阻尼模型的阻尼系数

Tab. 2 Damping coefficients of different equivalent Rayleigh damping models

类别	RFT		RET	
	α	β	α	β
模型 A	0.184 7	0.006 3	0.184 9	0.006 3
模型 B	0.362 5	0.014 5	0.364 1	0.014 6

El Centro 波作用下，RFT、RET 和 CF 对应的结构顶层动力响应时程近似相等(图 7～图 8)。如表 3 所示，对于模型 A，RFT 的顶层位移峰值、加速度峰值的相对误差分别为 1.02%、0.70%；RET 的顶层位移峰值、加速度峰值相对误差分别为 1.05%、0.71%。对于模型 B，RFT 和 RET 的顶层位移(加速度)峰值相对误差分别为 1.18%(0.94%)、1.30%(1.19%)。

对于天津波作用下的模型 A，如图 9 所示，在 0～8 s时，RFT、RET 和 CF 的顶层位移时程和加速度时程差异较大，分析其原因，RFT 和 RET 为时域计算方法，对应的计算结果包含瞬态响应和稳态响应，CF 为频域计算方法，对应的计算结果仅包含稳态响

应。在 8 s 以后,瞬态响应逐渐衰减消失,RFT、RET 和 CF 的动力响应时程近似相等。对于天津波作用下的模型 B,RFT、RET 和 CF 的动力响应时程近似相等。如表 4 所示,对于模型 A,RFT 的顶层位移(加速度)峰值相对误差为 2.65%(0.10%);RET 的顶层位移(加速度)峰值相对误差为 2.66%(0.09%)。对于模型 B,RFT 的顶层位移(加速度)峰值相对误差为 0.78%(2.14%);RET 的顶层位移(加速度)峰值相对误差为 0.93%(2.35%)。

表 3　El Centro 波作用下不同方法计算的结构响应峰值

Tab. 3　Peak structural responses with different methods under El Centro wave

类别	模型 A			模型 B		
	CF	RFT	RET	CF	RFT	RET
位移峰值/cm	39.947 5	39.540 6	39.528 6	34.786 7	34.375 5	34.335 0
相对误差/%	–	1.02	1.05	–	1.18	1.30
加速度峰值/(cm · s^{-2})	478.453 6	475.113 0	475.040 0	370.054 0	366.574 0	365.662 0
相对误差/%	–	0.70	0.71	–	0.94	1.19

表 4　天津波作用下不同方法计算的结构响应峰值

Tab. 4　Peak structural responses with different methods under Tianjin wave

类别	模型 A			模型 B		
	CF	RFT	RET	CF	RFT	RET
位移峰值/cm	23.840 8	23.209 3	23.206 9	20.054 2	19.898 1	19.867 8
相对误差/%	–	2.65	2.66	–	0.78	0.93
加速度峰值/(cm · s^{-2})	437.037 4	437.470 0	437.426 1	361.160 5	353.446 7	352.665 1
相对误差/%	–	0.10	0.09	–	2.14	2.35

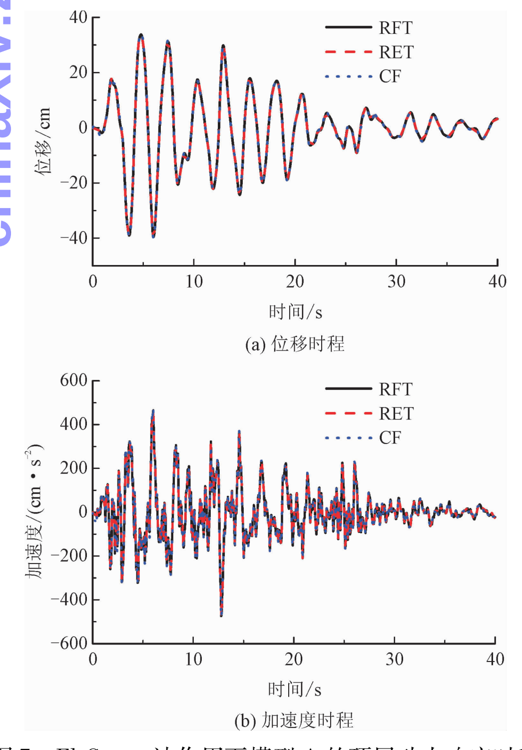


图 7　El Centro 波作用下模型 A 的顶层动力响应时程

Fig. 7　Time-histories of top floor dynamic responses of Model A under El Centro wave

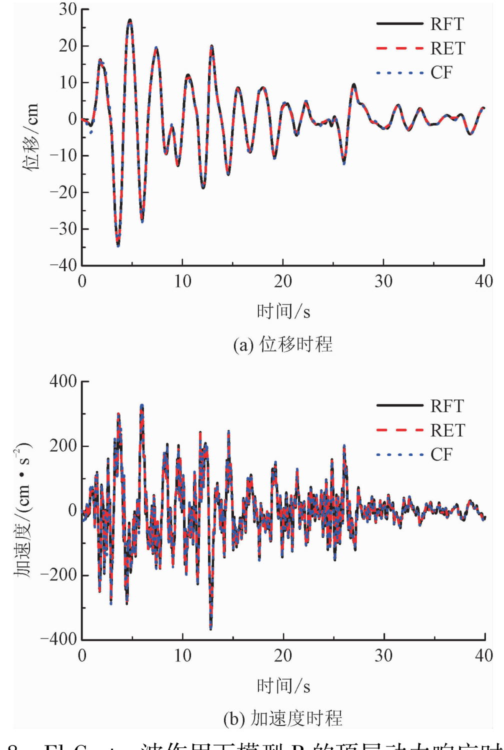


图 8　El Centro 波作用下模型 B 的顶层动力响应时程

Fig. 8　Time-histories of top floor dynamic responses of Model B under El Centro wave

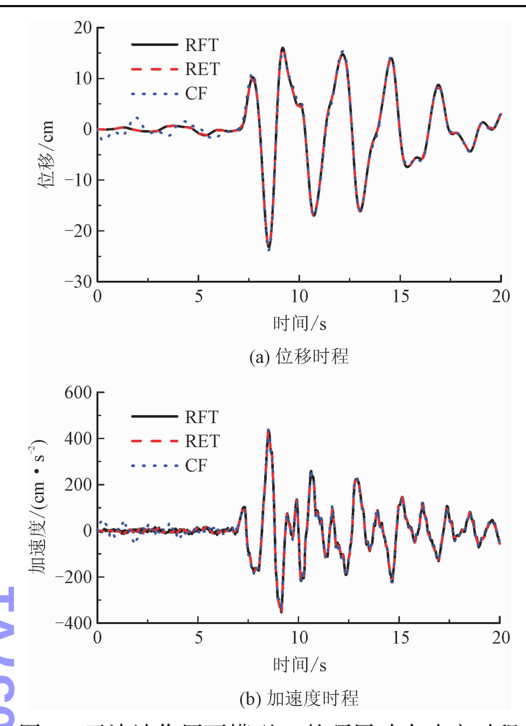


图9　天津波作用下模型A的顶层动力响应时程

Fig. 9　Time-histories of top floor dynamic responses of Model A under Tianjin wave

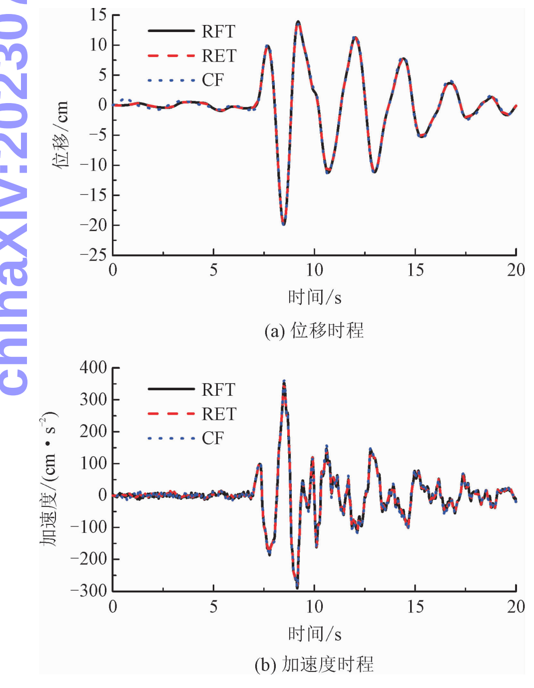


图10　天津波作用下模型B的顶层动力响应时程

Fig. 10　Time-histories of top floor dynamic responses of Model B under Tianjin wave

由于结构阻尼模型存在自由振动通解发散、有阻尼自振频率随损耗因子增大而增大等理论缺陷，导致基于阻尼衰减的计算结果和基于阻尼耗能的计算结果存在一定差异，两种结果不能形成完全统一的形式。但两种等效阻尼模型的计算结果近似相等，与自由衰减和耗散能量均能反映结构阻尼耗能本质的理论是一致的。

综上所述，由于结构阻尼模型的频域计算可视为准确值，上述计算结果对比证明了等效Rayleigh阻尼模型时域计算方法的正确性。但是，基于结构阻尼模型的频域计算方法仅适用于初始时刻处于静止状态（初值条件为零）的结构，等效Rayleigh阻尼模型作为一种时域阻尼模型，可考虑瞬态响应的影响，计算初始时刻处于非静止状态的结构动力响应，进一步拓展了结构阻尼模型的适用范围。

作为非比例阻尼结构体系的近似时域计算方法，等效Rayleigh阻尼模型可适用于非比例阻尼特性较弱的混合结构。与基于阻尼衰减等效的Rayleigh阻尼模型相比，基于阻尼耗能等效的Rayleigh阻尼模型计算结果近似相等，且不涉及求解复特征值，计算过程更简单，建议优先选用。

5　结　论

结合黏性阻尼模型和结构阻尼模型的优点，本研究提出了与结构阻尼模型等效的Rayleigh阻尼模型，并通过算例分析得出以下结论。

1）分别依据阻尼衰减和阻尼耗能，构建了等效于结构阻尼模型的单自由度体系黏性阻尼模型。分析表明，等效黏性阻尼模型可克服结构阻尼模型时域计算结果发散、初值条件不易确定等缺陷。

2）在单自由度体系等效黏性阻尼模型的基础上，进一步构建了多自由体系的等效Rayleigh阻尼，保留了结构阻尼模型中阻尼矩阵易构造的优点，可由材料损耗因子、结构质量矩阵和刚度矩阵确定对应的阻尼系数，避免了模态阻尼比的测定，计算过程简便，可直接用于计算非比例阻尼体系的时域动力响应。

3）结构阻尼模型仅适用于频域分析，等效Rayleigh阻尼模型的时域计算方法可考虑瞬态响应，进一步拓展了结构阻尼模型的适用范围。与基于阻尼衰减等效的Rayleigh阻尼模型相比，基于阻尼耗能等效的Rayleigh阻尼模型计算结果近似相等，且不涉及复模态分析，计算过程更简单。

参考文献：

[1]　曹跃杰，魏凌峰，张铭豪，等. 薄层复合材料螺栓连接结构渐进失效机制试验研究[J]. 航空学报，2021，42(12)：311-326.

CAO Yuejie, WEI Lingfeng, ZHANG Minghao, et al. Experimental study on progressive failure mechanism of thin-laminate bolted joints[J]. Acta aeronautica et astronautica Sinica, 2021, 42(12): 311-326(in Chinese).

[2] 熊海贝,陈佳炜,吴颖. 高层混凝土框架核心筒-木盒混合结构抗震性能研究[J]. 建筑结构学报,2018,39(8):62-70.
XIONG Haibei, CHEN Jiawei, WU Ying. Research on seismic performance of a concrete-wood hybrid structural system for tall building[J]. Journal of building structures, 2018, 39(8): 62-70(in Chinese).

[3] GENTA G. Vibration dynamics and control[M]. New York: Springer, 2009.

[4] MYKLESTAD N O. The concept of complex damping[J]. Journal of applied mechanics, 1952, 19(3): 284-286.

[5] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of structures[M]. New York: McGraw-Hill, 1993.

[6] REID T J. Free vibration and hysteretic damping[J]. The aeronautical journal, 1956, 60(544): 283.

[7] CHOPRA A K. Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering[M]. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2007.

[8] 梁超锋,刘铁军,邹笃建,等. 材料黏滞系数与损耗因子的频率相关性研究[J]. 力学学报,2012,44(5):933-937.
LIANG Chaofeng, LIU Tiejun, ZOU Dujian, et al. The frequency-dependent study on viscosity coefficient and loss tangent of viscoelastic materials[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2012, 44(5): 933-937(in Chinese).

[9] FOSS K A. Co-ordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamic systems[J]. Journal of applied mechanics, 1958, 25(3): 361-364.

[10] ZHOU X Y, YU R F, DONG D. Complex mode superposition algorithm for seismic responses of non-classically damped linear MDOF system[J]. Journal of earthquake engineering, 2004, 8(4): 597-641.

[11] CHOPRA A K. Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering[M]. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.

[12] 朱镜清,朱敏. 复阻尼多自由度系统动力分析的模态叠加法[J]. 地震工程与工程振动,2004,24(1):55-58.
ZHU Jingqing, ZHU Min. Two mode-superposition methods for dynamic analysis of MDOF systems with complex damping characteristics[J]. Earthquake engineering and engineering vibration, 2004, 24(1): 55-58(in Chinese).

[13] 孙攀旭,杨红,吴加峰,等. 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法[J]. 力学学报,2018,50(5):1185-1197.
SUN Panxu, YANG Hong, WU Jiafeng, et al. Complex mode superposition method based on frequency dependent viscous damping model[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2018, 50(5): 1185-1197(in Chinese).

[14] 刘庆林,傅学怡,孙占琦. 基于复阻尼假定的不同材料阻尼特性混合结构抗震分析复模态叠加法[J]. 建筑结构学报,2011,32(9):27-33.
LIU Qinglin, FU Xueyi, SUN Zhanqi. A complex mode superposition method for seismic analysis of structures of multiple material damping characteristics based on complex damping assumption[J]. Journal of building structures, 2011, 32(9): 27-33(in Chinese).

[15] 朱敏,朱镜清. 逐步积分法求解复阻尼结构运动方程的稳定性问题[J]. 地震工程与工程振动,2001,21(4):59-62.
ZHU Min, ZHU Jingqing. Studies on stability of step-by-step methods under complex damping conditions[J]. Earthquake engineering and engineering vibration, 2001, 21(4): 59-62(in Chinese).

[16] 潘玉华,王元丰. 含复阻尼振动系统的逐步积分法稳定性研究[J]. 土木工程学报,2010,43(增刊1):206-210.
PAN Yuhua, WANG Yuanfeng. Stability of step-by-step methods in solving complex damping vibration systems[J]. China civil engineering journal, 2010, 43(S1): 206-210(in Chinese).

[17] 张辉东,王元丰. 复阻尼模型结构地震时程响应研究[J]. 工程力学,2010,27(1):109-115.
ZHANG Huidong, WANG Yuanfeng. Study on seismic time-history response of structures with complex damping[J]. Engineering mechanics, 2010, 27(1): 109-115(in Chinese).

[18] 胡海岩. 结构阻尼模型及系统时域动响应[J]. 应用力学学报,1993,10(1):34-43.
HU Haiyan. Structural damping model and system dynamic response at time domain[J]. Chinese journal of applied mechanics, 1993, 10(1): 34-43(in Chinese).

[19] PARKER K J. Real and causal hysteresis elements[J]. The journal of the acoustical society of America, 2014, 135(6): 3381-3389.

[20] SUN P X, YANG H, ZHAO Y. Time-domain calculation method of improved hysteretic damped system based on frequency-dependent loss factor[J]. Journal of sound and vibration, 2020, 488: 115658.

[21] REGGIO A, DE ANGELIS M. Modelling and identification of structures with rate-independent linear damping[J]. Meccanica, 2015, 50(3): 617-632.

[22] WANG J. Rayleigh coefficients for series infrastructure systems with multiple damping properties[J]. Journal of vibration and control, 2015, 21(6): 1234-1248.

[23] 刘庆林,孙攀旭,杨红. 基于复阻尼理论的混合结构 Rayleigh 阻尼模型[J]. 地震工程学报,2018,40(5):983-987.
LIU Qinglin, SUN Panxu, YANG Hong. Rayleigh damping model of mixed structures based on complex damping theory[J]. China earthquake engineering journal, 2018, 40(5): 983-987(in Chinese).

（编辑　张璐）